Esercizio empirico: Funzioni e Sistemi Lineari

Obiettivo dell'esercizio

- Studiare e rappresentare graficamente alcune **funzioni lineari**.
- Capire il significato di coefficiente angolare e intercetta.
- Determinare se le funzioni sono **crescenti**, **decrescenti**, o **costanti**.
- Risolvere un **sistema di equazioni lineari** e rappresentarne graficamente la soluzione.
- Obiettivo: Comprendere le basi delle funzioni lineari e dei sistemi.

Cos'è una funzione lineare?

- Una funzione lineare è una relazione del tipo $Y = mX + q$.
- m: **coefficiente angolare**, indica la pendenza della retta.
- q: **intercetta**, indica dove la retta interseca l'asse Y.
- Il segno di m:
  - Se $m > 0$, funzione **crescente**.
  - Se $m < 0$, funzione **decrescente**.
  - Se $m = 0$, funzione **costante**.

Cosa rappresenta la pendenza?

- La **pendenza** m misura quanto velocemente cambia y al variare di x.
- Formula fondamentale:
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
- Se x aumenta di 1, y aumenta di m.
- **Esempio:** Se $m = 3$, ogni volta che x cresce di 1, y cresce di 3.

Perché è importante capire la pendenza?

- Determina se la funzione è **crescente**, **decrescente**, o **costante**.
- Utile per:
  - Capire relazioni tra variabili (**esempio: prezzo e quantità**).
  - Interpretare grafici in economia, finanza, ecc...
- **Sintesi:** La pendenza è una misura chiave per **descrivere e prevedere** comportamenti lineari.

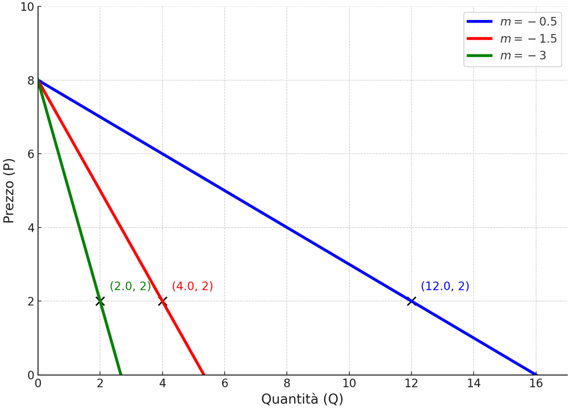
Variazioni di x e reazioni di y: cosa significa?

- Quando x aumenta di 1, quanto cambia y?
- Se $y = mx + q$:

$$\Delta y = m \times \Delta x$$

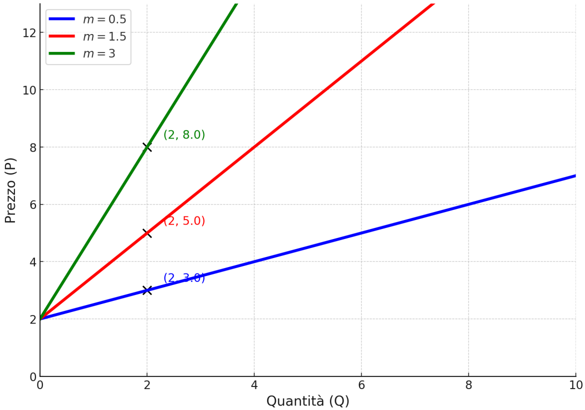
- Esempi:
  - Se $m = 3$: per ogni $+1$ in x, y cresce di 3.
  - Se $m = -2$: per ogni $+1$ in x, y decresce di 2.

Grafico: Stessa variazione di x, reazioni diverse di y (Domanda)



- Diverse curve di **domanda** con elasticità diverse.

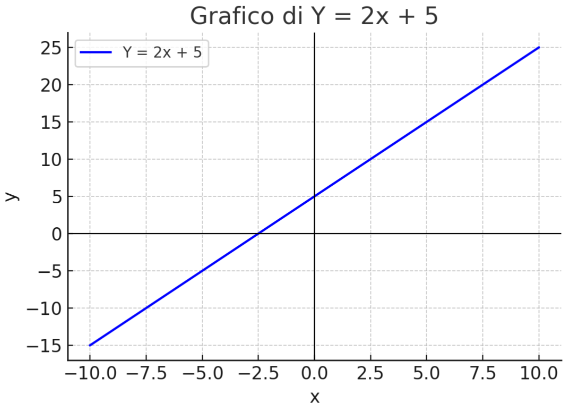
Grafico: Stessa variazione di x, reazioni diverse di y (Offerta)



- Diverse curve di **offerta** con elasticità diverse.

Esempio: Funzione crescente - Equazione

- Prendiamo la funzione $Y = 2x + 5$.
- Qui $m = 2 > 0$: quindi la funzione è **crescente**.
- Ogni volta che x cresce, Y cresce.



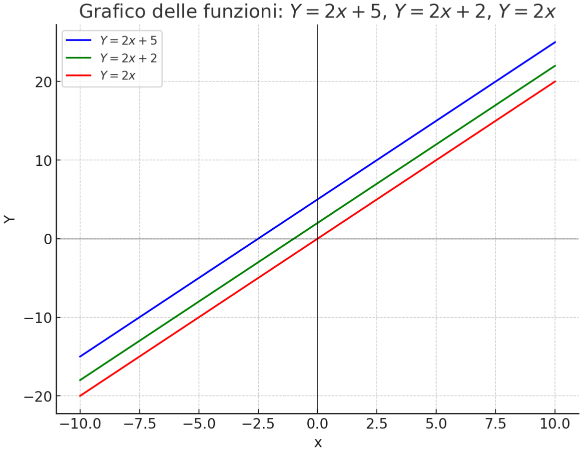
Esempio: Funzione crescente - Intercetta

- Intercetta: $q = 5$, la retta passa per il punto $(0, 5)$.
- **Per trovare l'intercetta**: sostituisci $x = 0$ nell'equazione e calcola Y, quindi l'intercetta è $(0, q)$.

Esempio: Funzione crescente - Equazione

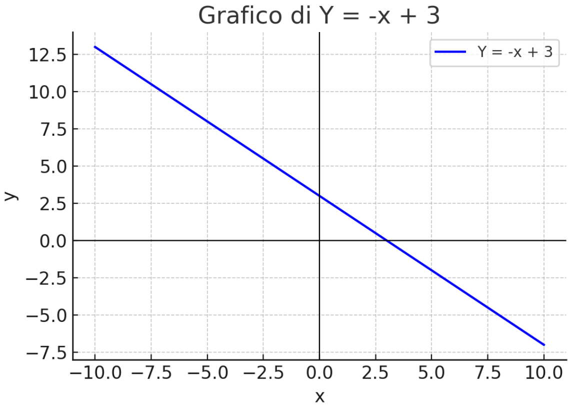
Prendiamo tutte le funzione:

- $Y = 2x + 5$
- $Y = 2x + 2$
- $Y = 2x$



Esempio: Funzione decrescente - Equazione

- Consideriamo $Y = -x + 3$.
- Qui $m = -1 < 0$: funzione **decrescente**.
- Quando x aumenta, Y diminuisce.



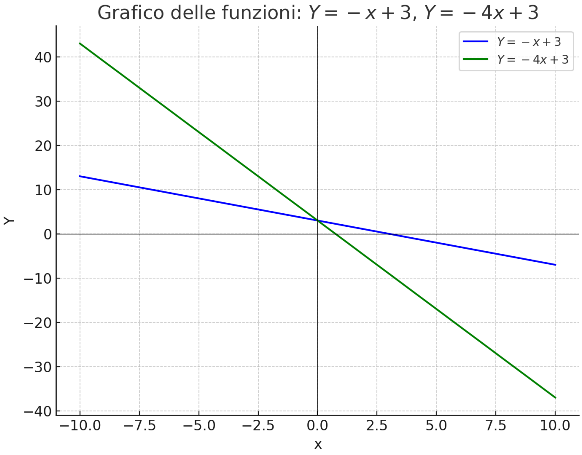
Esempio: Funzione decrescente - Intercetta

- Intercetta: $q = 3$, quindi la retta passa per $(0, 3)$.
- **Per trovare l'intercetta**: sostituisci $x = 0$ nell'equazione e calcola Y, quindi l'intercetta è $(0, q)$.

Esempio: Funzione decrescente - Equazione

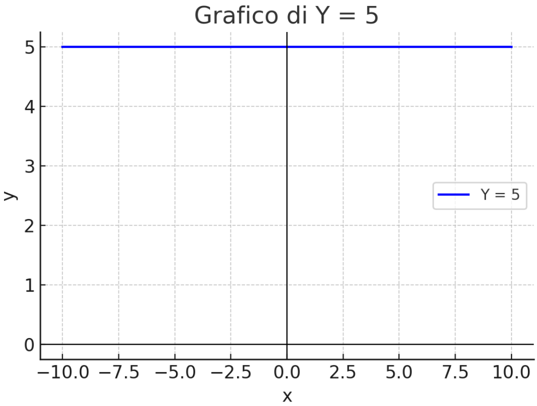
Prendiamo tutte le funzione:

- $Y = -x + 3$
- $Y = -4x + 3$



Esempio: Funzione costante - Equazione

- Esempio: $Y = 5$.
- $m = 0$: funzione **costante**.
- Non cambia al variare di x.



Esempio: Funzione costante - Intercetta

- La retta è orizzontale, parallela all'asse X.
- **Per trovare l'intercetta**: dato che $Y = 5$ è costante, l'intercetta è $(0, 5)$.

Cos'è un sistema lineare?

- Un sistema lineare è un insieme di equazioni lineari da risolvere insieme.
- Esempio:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

- Un sistema lineare è un insieme di due o più equazioni lineari con due incognite.
- Esempio applicato all'economia: relazione tra domanda e offerta.
- Le rette rappresentano: **Domanda** (decrescente) e **Offerta** (crescente).
- Punto di intersezione: **prezzo di equilibrio**.
- Obiettivo: trovare i valori di x e y che soddisfano entrambe le equazioni.

Esempio pratico: sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

- Obiettivo: trovare x, y che soddisfano entrambe.

Passo 1: isolare y

- Dalla seconda equazione: $y = 4 - 2x$

Passo 2: sostituire y

- Sostituire nella prima:

$$3x - 4(4 - 2x) = 7$$

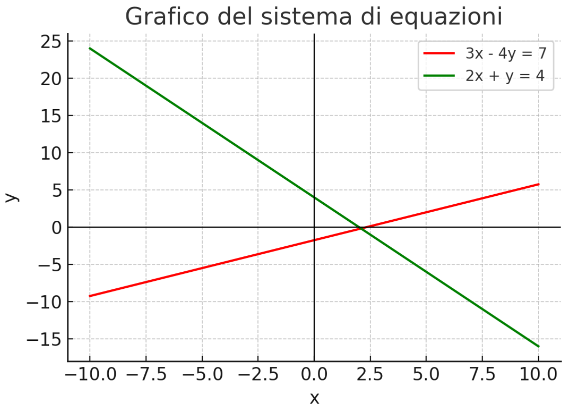
$$3x - 16 + 8x = 7$$

$$11x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{11}$$

Passo 3: calcolare y

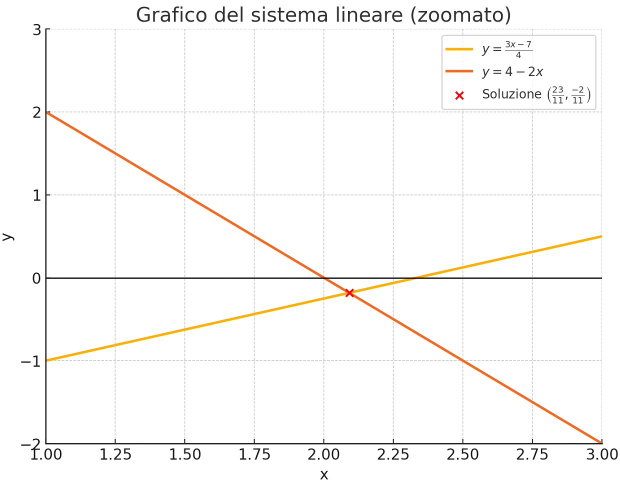
$$y = 4 - 2 \times \frac{23}{11} = \frac{44}{11} - \frac{46}{11} = -\frac{2}{11}$$

Grafico del sistema



Il punto di intersezione è la soluzione del sistema.

Grafico del sistema (zoomato)



Il punto di intersezione è la soluzione del sistema.

Conclusioni finali

- Ora sappiamo cosa è una funzione lineare e come disegnarla.
- Abbiamo visto come risolvere un sistema di due equazioni lineari.
- Grafico e calcolo sono due strumenti che vanno usati insieme.

Nuovo esercizio: sistema lineare completo

- Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

- Obiettivo: trovare x e y che soddisfano entrambe le equazioni.

Interpretazione grafica del sistema

- Le due equazioni rappresentano due rette.
- Il punto di intersezione **è la soluzione del sistema**.
- Possiamo risolverlo con il metodo di sostituzione.

Passo 1: Isolare y dalla prima equazione

- Partiami da:

$$x + y = 7$$

- Isoliamo y:

$$y = 7 - x$$

Passo 2: Sostituire y nella seconda equazione

- Sostituendo y in $3x - 2y = -4$:

$$3x - 2(7 - x) = -4$$

- Svolgiamo i conti:

$$3x - 14 + 2x = -4$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

Passo 3: Calcolare y

- Sostituiamo $x = 2$ nella prima equazione risolta per y:

$$y = 7 - 2 = 5$$

Soluzione del sistema

- Abbiamo trovato:

$$x = 2, \quad y = 5$$

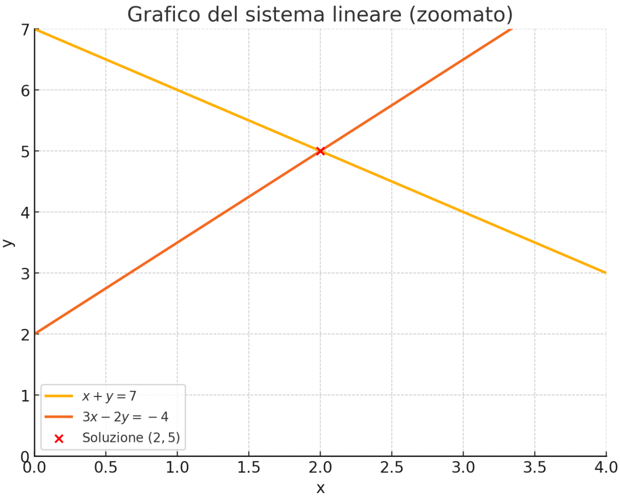
- Verifica:

$$\begin{cases} 2 + 5 = 7 \checkmark \\ 3(2) - 2(5) = 6 - 10 = -4 \checkmark \end{cases}$$

Intercette delle due rette

- Prima retta $x + y = 7$:
  - Intercetta Y: $x = 0 \Rightarrow y = 7$
  - Intercetta X: $y = 0 \Rightarrow x = 7$
- Seconda retta $3x - 2y = -4$:
  - Intercetta Y: $x = 0 \Rightarrow -2y = -4 \Rightarrow y = 2$
  - Intercetta X: $y = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

Grafico del sistema



Il punto di intersezione è la soluzione del sistema.